Theoretische Physik I

Hausübung, Blatt 8 **WS 03/04 Abgabetermin: 9.12.03**

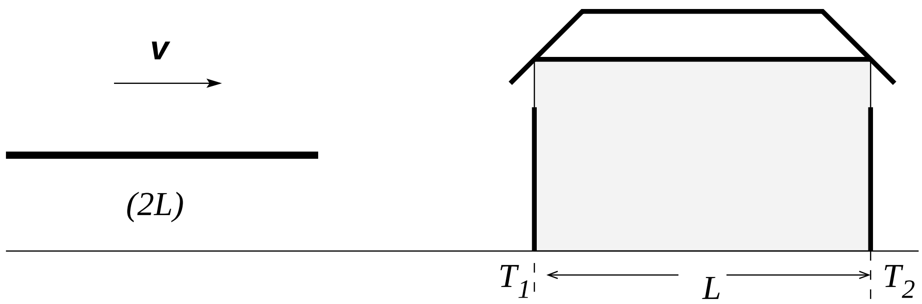
[H22] Erzeugende für Galilei-Transformationen **(1+1 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, daß für eine Phasenraumfunktion $F(q, p, t)$ die *partielle* Zeitableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ eine Erhaltungsgröße ist, falls die Hamiltonfunktion H sowie F Erhaltungsgrößen sind.

(b) Wählen Sie kartesische Koordinaten in einer Dimension und berechnen Sie die Erzeugendefunktion $F(x, p)$ der Transformation $\delta x = vt$, $\delta p = mv$, d.h. eine Funktion F, für die gilt $\delta x = \{x, F\}$ und $\delta p = \{p, F\}$.

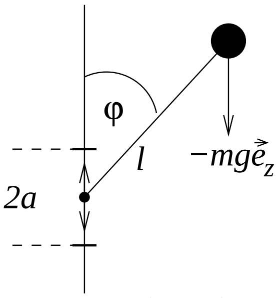
[H23] Relativistische Hexe **(3 Punkte)**

Eine Hexe fliegt auf ihrem Besen (Ruhelänge $2L$) mit konstanter Geschwindigkeit v auf eine Scheune der Ruhelänge L zu (Skizze, symbolisch). Das Vorder- und Hintertor der Scheune sind so miteinander verbunden, daß stets ein Tor offen und das andere Tor geschlossen ist. Das vordere Tor (T1) sei geöffnet. Ein Beobachter im Ruhesystem der Scheune schließt dieses Tor (T1), wenn das Ende des Besens gerade in der Scheune verschwunden ist. Ist es möglich, daß sowohl die Hexe als auch das hintere Tor (T2) bei diesem Flugmanöver unbeschädigt bleiben? Diskutieren Sie den Ablauf anhand eines Minkowski-Diagramms im Ruhesystem der Scheune.



[H24] Resonanz-Jonglieren **(1+1+1+1+1 Punkte)**

Der Drehpunkt eines *invertierten* Pendels der Länge ℓ soll vertikal mit einer Periode von 2τ und einer Amplitude von $a \ll \ell$ oszillieren, und zwar mit einer konstanten Beschleunigung $c = \frac{8a}{\tau^2} \gg g$, die bei jedem Zeitpunkt $t = n\tau$, n ganzzahlig, sprunghaft ihr Vorzeichen wechselt. Wie schnell (Frequenz $\nu = \frac{1}{2\tau}$) muß die Oszillation sein, damit die invertierte Gleichgewichtslage ($\varphi = 0$) stabil wird?



(a) In der Halbperiode $[0, \tau]$ erfährt die Pendelmasse eine Kraft von $-m(g - c)\vec{e}_z$, in der Halbperiode $[\tau, 2\tau]$ ist es $-m(g + c)\vec{e}_z$. Wie lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen für kleine Winkel φ während der beiden Halbperioden? (Definieren Sie die Abkürzungen $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$, $d^2 = \frac{c}{\ell}$, $\Omega^2 = d^2 - \omega^2$, $k^2 = d^2 + \omega^2$.)

(b) Bringen Sie die Lösungen $\varphi(t)$ in die Form

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}(t) = A_1(t) \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}(0) \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}(\tau + t) = A_2(t) \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}(\tau)$$

mit den 2×2-Matrizen $A_1(t)$ und $A_2(t)$ und geben Sie die „Halbperioden Matrizen" $A_1 := A_1(\tau)$ und $A_2 := A_2(\tau)$ an.

(c) Formulieren Sie die Stabilitätsbedingung $|Sp(A_1 A_2)| < 2$ und drücken Sie darin $k\tau$ und $\Omega\tau$ durch die dimensionslosen Verhältnisse $\frac{a}{\ell} = \epsilon^2 \ll 1$ und $\frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1$ aus.
(*Zwischenergebnis*: $Sp(A_1 A_2) = 2\cosh k\tau\ \cos\Omega\tau + (\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}) \sinh k\tau\ \sin\Omega\tau$.)

(d) Entwickeln Sie in ϵ und μ bis zur Ordnung ϵ^4 und $\epsilon^2\mu^2$. Verifizieren Sie, daß sich die Stabilitätsbedingung in dieser Näherung auf die Bedingung $2\epsilon^2 > 3\mu^2$ reduziert.

(e) Formen Sie diese Ungleichung um in $\nu > \nu_{\text{krit}}(g, \ell, a)$ und setzen Sie in ν_{krit} die Zahlenwerte $\ell = 20$ *cm* und $a = 1$ *cm* ein.